**Pr. Mohamed ET-TOLBA**
**Institut National des Postes et Télécommunications** **Septembre 2019**

# Théorie de décision et d'estimation
# Séries d'exercices - Série 2

## Exercice 1 : Qualité d'un estimateur

Considérons un ensemble de $K$ mesures (échantillons), $(x_1, x_2, ..., x_K)$, générées par l'échantillonnage d'une observation aléatoire $X(t)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ inconnu. On veut estimer le paramètre inconnu $\theta = \lambda$ en utilisant les deux estimateurs définis par :

$$\Theta_1 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} X_k \quad \text{et} \quad \Theta_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

1) Montrer que $\Theta_1$ et $\Theta_2$ sont deux variables aléatoires?

2) Calculer les biais $B[\Theta_1]$ et $B[\Theta_2]$ des deux estimateurs $\Theta_1$ et $\Theta_2$? Conclure?

3) Le résulat précédent suffit-il pour décider de la qualité des deux estimateurs?

4) Trouver les variances $Var[\Theta_1]$ et $Var[\Theta_2]$ des deux estimateurs?

5) Lequel des deux estimateurs est plus efficace? Justifier votre réponse?

## Exercice 2 : Estimateur au maximum de vraissemblance

Considérons la transmission d'un signal constant $s(t) = A$ inconnu à travers un canal qui ajoute un bruit blanc gaussien $n(t)$ de moyenne nulle est de variance $A$. Le paramètre inconnu $\theta$ se manifeste comme étant le signal inconnu et la variance du bruit. Le signal en sortie du canal s'écrit :

$$x(t) = A + n(t)$$

. Nous nous intéressons à l'estimation du paramètre inconnu $\theta = A$, avec l'approche au maximum de vraissemblance, en observant un vecteur $\mathbf{x}$ de $K$ échantillons :

$$x_k = A + n_k \quad k = 1, 2, ..., K$$

1) Rappeler le critère de l'estiamteur au maximum de vraissemblance? Donner sa forme équivalente?

2) Déterminer l'expression de la densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta)$ en fonction de $\theta$?

3) Trouver l'expression de la fonction logarithmique de vraissemblance en fonction de $\theta$?

4) Déterminer l'estiamteur au maximum de vraissemblance $\widehat{\Theta}_{MV}$?

5) Que devient l'estimateur au maximum de vraissemblance si le bruit est de variance $\sigma^2$ connue?

## Exercice 3 : Estimation spectrale via le maaximum de vraissemblance

Considérons un signal $s(t)$ composé par une somme de $p$ harmoniques inconnus :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{p} cos(2\pi f_i t)$$

Le signal $s(t)$ est transmis à travers un canal qui lui ajoute un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$. On veut estimer le vecteur de fréquences inconnu $\theta = \mathbf{f} = [f_1, f_2, ...., f_p]^T$. Pour celà, on suppose qu'on bserve un vecteur $\mathbf{x}$ de $K$ échantillons qui s'expriment :

$$x_k = \sum_{i=1}^{p} cos(2\pi f_i k) + n_k \quad k = 0, 1, ..., K-1$$

1) Trouver l'expression de la densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta)$? En déduire la fonction de vraissemblance logarithmique?

2) Montrer que l'estimation de $\theta = \mathbf{f}$ via le maximum de vraissemblance est équivalent à minimiser la quantité $J(\mathbf{f})$ définie par :

$$J(\mathbf{f}) = \sum_{k=0}^{K-1} \left( x_k - \sum_{i=1}^{p} cos(2\pi f_i k) \right)^2$$

3) Montrer que l'estimation individuelle des harmoniques revient à minimiser la quantité :

$$J(f_i) = \sum_{k=0}^{K-1} (y_{ik} - cos(2\pi f_i k)^2$$

où $y_{ik}$ est à définir.

4) Où réside la difficulté pour réaliser l'estimateur au maximum de vraissemblance d'une manière individuelle?

## Exercice 4 : Estimateur aux moindres carrés

Considérons un ensemble de $K$ observations, $(x_1, x_2, ..., x_K)$, issues de la transmission d'un signal constant, $s_k = s_k(\theta) = \theta$ à travers un canal gaussien:

$$x_k = \theta + n_k \quad k = 0, 1, ...., K-1$$

où $\theta$ est le paramètre inconnu, et les $n_k$ sont les échantillons d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$.

1) Rappeler le principe de l'estimateur aux moindres carrés en spécifiant sa différence avec les autres estimateurs classiques?

2) Trouver l'expression de l'erreur quadratique $J(\theta)$?

3) Déterminer l'expression de l'estimateur aux moindres carrés $\widehat{\Theta}_{MC}$? Conclure?

4) Trouver l'expression de l'erreur quadratique minimale $J_{min}$?