Pr. Mohamed ET-TOLBA
Institut National des Postes et Télécommunications **Janvier 2019**

Signaux et systèmes - Traitement du signal aléatoire
Séries d'exercices - Série 2

Exercice 1 : La somme et le produit de deux signaux aléatoires SSL

Soit $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux aléatoires stationnaires au sens large et indépendants. Leurs fonctions d'autocorrélation sont $R_{XX}(\tau)$ et $R_{YY}(\tau)$ respectivement. Considérons les deux signaux aléatoires $V(t) = X(t) + Y(t)$ et $Z(t) = X(t).Y(t)$.

1) Supposons que $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL.
   a) Trouver l'expression de la moyenne statistique de $V(t)$?
   b) Déterminer la fonction d'autocorrélation statistique $R_{VV}(t_1, t_2)$ de $V(t)$? Conclure?
   c) Trouver l'expression la densité spectrale de puissance $S_{VV}(f)$ de $V(t)$?
2) Considérons maintenant le cas où $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL et orthogonaux.
   a) Déterminer les fonctions d'autocorrélations statistiques $R_{VV}(\tau)$ et $R_{ZZ}(\tau)$ en fonction de $R_{XX}(\tau)$ et $R_{YY}(\tau)$?
   b) Trouver les densités spectrales de puissance $S_{VV}(f)$ et $S_{ZZ}(f)$ en fonction de $S_{XX}(f)$ et $S_{YY}(f)$?

Exercice 2 : Effet d'un système LTI sur un signal SSL

Considérons la transmission d'un signal aléatoire stationnaire au sens large $X(t)$, de fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau)$, à travers un système dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est définie par :

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - T_0),$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac, et T_0 un décalage temporelle fixe. La réponse du système à $X(t)$ est un signal aléatoire $Y(t)$ qui s'exprime par :

$$Y(t) = h(t) * X(t)$$

où l'opérateur $*$ désigne le produit de convolution.

1) Montrer que ce système est linéaire et invariant dans le temps?
2) Montrer que $R_{YY}(\tau) = 2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau + T_0) + R_{XX}(\tau - T_0)$
3) Déterminer l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{YY}(f)$ en fonction de $S_{XX}(f)$?
4) Trouver l'expression de $S_{YY}(f)$ dans les cas suivants :
   a) $X(t)$ est un bruit blanc de variance σ^2,
   b) $X(t)$ est un signal aléatoire de fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$.

Exercice 3 : La réponse d'un système LTI à un signal SSL

Un signal aléatoire stationnaire au sens large $X(t)$, de fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, où α est une constante positive, est transmis à travers un système linéaire invariant dans le temps et dont la réponse impulsionnelle s'écrit :

$$h(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

où β est une constante positive, et $u(t)$ est le signal échelon unitaire.

1) Déterminer la réponse en fréquence $H(f)$ du système?

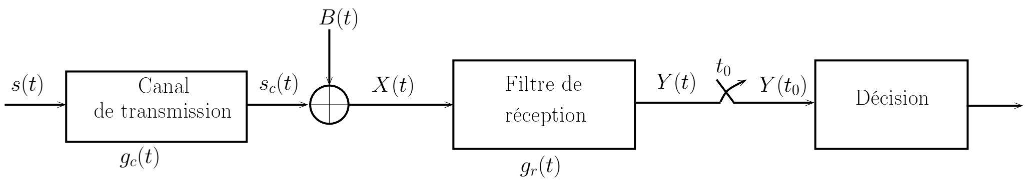
2) Trouver l'expression de la densité spectrale $S_{XX}(f)$ du signal d'entée $X(t)$?

3) Déterminer l'expression de la densité spectrale $S_{YY}(f)$ du signal de sortie $Y(t)$? En déduire l'expression de sa fonction d'autocorrélation $R_{YY}(\tau)$?

4) Trouver l'expression de la puissance moyenne P_Y du signal de sortie en fonction de α et β?

Exercice 4 : Filtrage adapté

Considérons la transmission d'un signal déterministe $s(t)$ à travers un canal de réponse impulsionnelle $g_c(t) = K\delta(t-\tau)$. La sortie du canal est entachée d'un bruit blanc gaussien $B(t)$ de densité spectrale $S_{BB}(f) = \frac{N_0}{2}$, où N_0 est constante positive. Le récepteur observe un signal bruité $X(t)$ et tente de retrouver l'information utile. Le signal reçu est passé d'abord par un filtre de réception, de réponse impulsionnelle $g_r(t)$, pour minimiser l'effet du bruit. Ensuite, la sortie $Y(t)$ du filtre est échantionnée à un instant t_0. Cette opération est suivie par une prise de décision. La structure de la chaîne de communication est présentée dans la figure ci-dessous.



1) Trouver l'expression du signal $X(t)$ en fonction de $s(t)$ et $B(t)$?

2) Déterminer l'expression du signal $Y(t)$ en spécifiant la partie correspondant au signal util et la partie correspondant au bruit?

3) Trouver l'expression du rapport signal sur bruit $RSB(t)$, en sortie du filtre de réception, dans le domaine temporel? Réécrire cette expression en utilisant la transformée de Fourier et le filrage d'un signal aléatoire?

4) Chercher le filtre de réception optimal $g_{r,opt}(t)$ qui maximise le RSB à l'instant t_0? Quelle est la condition pour que ce filtre soit physiquement réalisable?

5) Trouver la valeur maximale du RSB en fonction de l'énergie E_s du signal $s(t)$?