Cycle d'ingénieur
Traitement du signal déterministe
Pr. Mohamed ET-TOLBA
Institut National des Postes et Télécommunications

Novembre 2018

Séries d'exercices – Série 1

Exercice 1 : Séries de Fourier, Formule de Parseval

Considérons le signal analogique $x(t)$ qui s'exprime,

$$x(t) = A + B.cos^2(2\pi t + \theta) \quad ; t \in \mathbb{R}$$

où A, B et θ sont des constantes.

1) Montrer que $x(t)$ est périodique et déterminer sa période T_0?
2) Déterminer la classification énergétique du signal $x(t)$?
3) Calculer les coefficients de Fourier du signal $x(t)$ en fonction de A, B et θ ?
4) Vérifier la formule de Parseval pour le signal $x(t)$?
5) Trouver la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$ en fonction de A, B et θ?
6) Tracer le spectre $X(f)$ pour $A = 2$, $B = 6$ et $\theta = 0$? Qu'appelle-t-on ce spectre ?

Exercice 2 : Transformée de Fourier, Signal signe, Signal échelon unitaire

Considérons le signal $x(t)$ analogique défini par :

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) - e^{\alpha t}u(-t), \quad \alpha > 0$$

Où $u(t)$ est le signal échelon unitaire.

1) Tracer le signal $x(t)$ en fonction du temps ?
2) Déterminer l'expression de la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$?
3) Utiliser le résultat trouver dans 1) pour calculer la transformée de Fourier du signal $sgn(t)$ défini par :

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t > 0 \\ -1 & \text{pour} \quad t < 0 \end{cases}$$

4) En utilisant la relation $u(t) = \frac{1}{2}(sgn(t) + 1)$, déterminer la transformée de Fourier du signal échelon unitaire $u(t)$?
5) Utiliser le théorème d'intégration et la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac pour retrouver la transformée de Fourier du signal échelon unitaire ?

Exercice 3 : **Transformée de Fourier, Autocorrélation, Spectre d'énergie**

Soit le signal analogique $x(t)$ qui s'exprime comme suit,

$$x(t) = A.e^{-j2\pi f_0 t} rect_T(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

où A est une constante réelle, f_0 une fréquence constante et $rect_T(t)$ un signal rectangulaire centré et de durée T.

1) Déterminer la classification énergétique du signal $x(t)$?
2) Calculer la transformée de Fourier, $X(f)$, du signal $x(t)$? Interpréter le résultat ?
3) En utilisant le résultat de la question précédente, trouver la densité spectrale d'énergie, $S_{xx}(f)$, du signal $x(t)$?
4) Calculer la fonction d'autocorrélation, $R_{xx}(\tau)$, du signal $x(t)$?
5) Retrouver l'énergie, E_x, du signal $x(t)$ en utilisant le résultat de la question précédente ?

Exercice 4 : **Transmission des signaux déterministes à travers un système linéaire**

Considérons un système linéaire dont réponse impulsionnelle est définie par :

$$h(t) = A.\delta(t) + B\delta(t - t_0)$$

où A, B et t_0 sont des constantes. $\delta(.)$ désigne l'impulsion de Dirac.

La réponse $y(t)$ du système à un signal d'entrée $x(t)$ est donnée par :

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

1) Montrer que le système est linéaire et temporellement invariant ?
2) Trouver l'expression du signal de sortie $y(t)$ en fonction de $x(t)$, A, B et t_0 ?
3) Prenant un signal d'entrée qui s'exprime par :

$$x(t) = 3 + 5.cos^2(2\pi f_0 t)$$

Où f_0 est une fréquence constante.

a) Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$? En déduire celle de sa densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$?
b) Trouver l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$ du signal $y(t)$?
c) Déterminer l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{yy}(f)$?
d) Trouver l'expression de la puissance moyenne P_y du signal $y(t)$?