Pr. Mohamed ET-TOLBA
Institut National des Postes et Télécommunications **Septembre 2019**

Théorie de décision et d'estimation
Séries d'exercices - Série 1

Exercice 1 : Test d'hypothèses binaires - Approche de Bayes

Considérons un problème de détection binaire où le détecteur observe une variable aléatoire X pour décider laquelle des deux hypothèses H_0 et H_1 est vraie. Nous supposons qu'une hypothèse $H_i,\ i = 0, 1$ est émise avec une probabilité à priori dénotée $P_i = Pr(H_i)$. La densité de probabilité de X, sous l'hypothèse $H_i,\ i = 0, 1$, est notée $f_X(x|H_i)$. Nous désignons par C_{ij} le coût associé à l'événement “choisir H_i lorsque H_j est vraie”, et par $Z_i,\ i = 0, 1$ la zone de décision associée à l'hpothèse H_i.

1) Déterminer l'expression du coût moyen de Bayes C_B en fonction de $P_0,\ P_1,\ Z_0,\ f_X(x|H_0)$, $f_X(x|H_1)$ et $\{C_{ij}\}_{i=0,1;j=0,1}$?

2) Etablir le test de Bayes en minimisant le coût moyen C_B avec un seuil de décision η à spécifier?

3) Déterminer l'expression de la probabilité d'erreur Pe? En déduire une nouvelle règle de décision et le seuil correspondant?

4) Reprenons le résulat trouvé dans 1) et supposons que :

$$f_X(x|H_0) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

$$f_X(x|H_1) = e^{-2|x|}$$

   Nous posons $C_{00} = C_{11} = 0$, $C_{01} = 2$, $C_{10} = 1$, et $P_0 = \frac{2}{3}$

   a) Déterminer le test de Bayes?

   b) Trouver les zones de décision Z_0 et Z_1? En deduire la valeur du coût moyen de Bayes C_B?

5) Refaire 4) a) et b) pour $P_0 = \frac{1}{2}$? Conclure?

Exercice 2 : Approches de Bayes et Neyman-Pearson

Nous cherchons à concevoir un détecteur pour décider de la présence ou non d'un signal $S(t)$ au vu d'une observation bruitée $X(t)$. Pour celà, nous utilisons le concept de test d'hypothèses binaires où nous associons l'hypothèse H_0 à l'événement “Le signal $S(t)$ n'est pas émis”, et l'hypothèse H_1 à l'événement “Le signal $S(t)$ est émis”. Par ailleurs, une hypothèse $H_i,\ i = 0, 1$, est émise avec une probabilité à priori $P_i = Pr(H_i)$. Nous supposons que le détecteur observe un seul échantillon de $X(t)$ pour faire sa décision. Par conséquent, nous formulons les observations, sous les hypothèses H_0 et H_1, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} H_0 &\quad : \quad X = N \\ H_1 &\quad : \quad X = S + N \end{aligned}$$

où S et N sont deux variables aléatoires indépendantes dont les densités de probablité sont définies par :

$$\begin{aligned} f_S(\vartheta) &= 2e^{-2\vartheta}u(\vartheta) \\ f_N(\vartheta) &= 10e^{-10\vartheta}u(\vartheta) \end{aligned}$$

La fonction $u(.)$ désigne l'échelon unitaire.

1) Montrer que la densité de probabilité de X s'écrit :

$$\begin{aligned} f_X(x|H_0) &= 10e^{-10x}u(x) \\ f_X(x|H_1) &= \frac{5}{2}(e^{-2x} - e^{-10x})u(x) \end{aligned}$$

2) Trouver l'expression du rapport de vraissemblance $\Lambda(x)$?

3) Etablir la règle de décision de Bayes avec un seuil η calculé dans les conditions suivantes : $P_0 = \frac{1}{4}$, $P_1 = \frac{3}{4}$, $C_{01} = C_{10} = 5$, et $C_{00} = C_{11} = 0$?

4) En spécifiant la valeur de γ, montrer que le test de Bayes peut se réduire à :

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

5) Trouver le seuil de décision η pour un détecteur utilisant le critère de Neyman-Pearson avec une probabilité de fausse alarme $P_{FA} = 10^{-2}$?

6) Calculer la probabilité de fausse alarme P_{FA} et la probabilité de détection P_D pour le critère de Neyman-Pearson avec des valeurs arbitraires de γ? Tracer la courbe COR?

Exercice 3 : Détection de la présence d'une tension électrique

Considérons une source qui émet un signal électrique constant $s(t)$ pouvant prendre les valeurs 0 et A. Nous associons l'hypothèse H_0 à l'événement "La sortie de la source est A", et l'hypothèse H_1 à l'événement "La sortie de la source est 0". Le signal $s(t)$ est transmis à travers un canal qui lui ajoute un bruit blanc gaussien $W(t)$ de moyenne nulle et de variance σ^2. Le signal en sortie du canal s'écrit :

$$X(t) = s(t) + W(t)$$

Le signal $X(t)$ est échantillonné pour obtenir K échantillons $x_1, x_2, ..., x_K$. Les échantillons du bruit sont indépendants les uns des autres. De plus, ils sont indépendants des sorties de la source. Sous les hypothèses H_0 et H_1, les observations s'expriment :

$$\begin{aligned} H_0 \ : \ x_i &= w_i \qquad i = 1, 2, ..., K \\ H_1 \ : \ x_i &= A + w_i \quad i = 1, 2, ..., K \end{aligned}$$

1) Déterminer les expressions des deux densités de probabilité $f_{X_i}(x_i|H_0)$ et $f_{X_i}(x_i|H_1)$?

2) Trouver la densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|H_i)$ du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_K)$ sous l'hypothèse $H_i,\ i = 0, 1$? En déduire l'expression du rapport de vraissemblance $\Lambda(\mathbf{x})$?

3) Etablir la règle de décision avec un seuil de décision η?

4) Trouver la règle de décision équivalente en utilisant le rapport logarithmique de vraissemblance? (Le nouveau seuil de décision γ s'exprimera en fonction de η, A, σ^2, et K)

5) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la probabilité de fausse alarme P_{FA} et la probabilité de détection P_D?

6) Dans le cas où H_0 et H_1 sont équiprobables, déterminer l'expression de la probabilité d'erreur P_e?

Exercice 4 : Détection des signaux dans un bruit gaussien

Considérons un système de communication numérique où une source émet un des deux signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ à chaque T_s secondes. Nous associons l'hypothèse H_0 à l'événement "$s_0(t)$ est émis" et l'hypothèse H_1 à l'événement "$s_1(t)$ est émis". Le signal $s_i(t),\ i = 0, 1$ est transmis à travers un canal qui lui ajoute un bruit blanc gaussien $W(t)$ de moyenne nulle et de variance σ^2. Le bruit est indépendant de la sortie de la source. Le signal reçu $X(t)$ s'écrit :

$$X(t) = s_i(t) + W(t) \quad i = 0, 1 \ \text{ et } \ 0 \leq t \leq T_s$$

Le signal $X(t)$ est échantillonné pour générer K échantillons $(x_1, x_2, ..., x_K)$ représentés par le vecteur $\mathbf{x}$. Nous formulons les observations, sous les deux hypothèses H_0 et H_1, comme suit :

$$\begin{array}{rcrcl} H_0 & : & \mathbf{x} & = & \mathbf{s}_0 + \mathbf{w} \\ H_1 & : & \mathbf{x} & = & \mathbf{s}_1 + \mathbf{w} \end{array}$$

où $\mathbf{s}_0 = [s_{01}, s_{02}, ..., s_{0K}]$, $\mathbf{s}_1 = [s_{11}, s_{12}, ..., s_{1K}]$, et $\mathbf{w} = [w_1, w_2, ..., w_K]$. Nous supposons que les échantillons du bruit sont indépendants les uns des autres. Nous admettons aussi que le récepteur dispose des probabilités à priori $P_0 = Pr(H_0)$ et $P_1 = Pr(H_1)$ pour faire la détection du signal transmis.

1) Déterminer les expressions des densités de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|H_0)$ et $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|H_0)$?

2) Trouver l'expression du rapport de vraissemblance $\Lambda(\mathbf{x})$?

3) Etablir la règle de décision au sens du maximum à postériori (MAP) en spécifiant le seuil de décision η?

4) Trouver la forme équivalente du test précédent en utilisant le rapport logarithmique de vraissemblance?

5) Refaire la question 4) si les hypothèses H_0 et H_1 sont équiprobables? Que devient ce test si, en plus, les signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ ont la même énergie? Conclure?

6) Tracer la structure du détecteur trouvé dans 5)?