Pr. Mohamed ET-TOLBA
Institut National des Postes et Télécommunications **Janvier 2019**

Signaux et systèmes - Traitement du signal aléatoire
Séries d'exercices - Série 1

Exercice 1 : Carcatérisation de la somme de deux signaux aléatoires

Considérons deux signaux aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ de moyennes statistiques $\mu_X(t))$ et $\mu_Y(t)$ respectivement. Leurs fonctions d'autocorrélation sont $R_{XX}(t_1, t_2)$ et $R_{YY}(t_1, t_2)$. La fonction d'intercorrélation de $X(t)$ et $Y(t)$ est notée $R_{XY}(t_1, t_2)$. Soit le signal aléatoire $Z(t)$ défini par :

$$Z(t) = \alpha X(t) + \beta Y(t)$$

où α et β sont deux constantes réelles.

1) Trouver la moyenne statistique $\mu_Z(t)$ de $Z(t)$ en fonction de $\mu_X(t)$ et $\mu_Y(t)$?
2) Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{ZZ}(t_1, t_2)$? En déduire la fonction d'autocovariance $C_{ZZ}(t_1, t_2)$ de $Z(t)$?
3) Sous quelles conditions $R_{ZZ}(t_1, t_2)$ est la somme des deux fonctions d'autocorrélation $R_{XX}(t_1, t_2)$ et $R_{YY}(t_1, t_2)$?
4) Refaire les questions 1) et 2) pour $Y(t) = X(t - T_0)$, où T_0 est un décalage temporel positif?

Exercice 2 : Le signal télégraphique

Considérons le signal télégraphique représenté par un processus aléatoire réel $X(t)$, à valeurs dans $\{-1, +1\}$, qui s'exprime par :

$$X(t) = (-1)^K$$

où K est une variable aléatoire indiquant le nombre de transitions dans un intervalle de temps T. Le processus aléatoire $X(t)$ verifie les propriétés suivantes :

- $P\big(X(0) = -1\big) = p$
- Les nombres de transitions dans deux intervalles disjoints sont indépendants
- La variable aléatoire K suit une loi de Poisson de paramètre λT :

$$P(K = k) = \frac{\big(\lambda T\big)^k}{k!} e^{(-\lambda T)}$$

1) Déterminer l'expression de $P(X(t) = 1)$ et celle de $P(X(t) = -1)$
2) Trouver l'expression de $\mu_X(t)$ en fonction de p et λ? Sous quelles conditions $\mu_X(t)$ est-elle indépendante du temps?
3) Supposons que la condition $p = 1/2$ est vérifiée.
   a) Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$?
   b) En déduire que $X(t)$ est un signal SSL?
4) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$?

Exercice 3 : Caractérisation d'un signal aléatoire cosinusoïdal

Soit le signal aléatoire $Y(t) = Xcos(\omega_0 t+\Theta)$, où X et Θ sont deux variables aléatoires indépendantes, et ω_0 est une constante.

1) Supposons que Θ est fixée à une valeur θ_0. Vérifier si le signal $Y(t)$ est stationnaire au sens large dans les cas suivants :
   a) La variable aléatoire X est de moyenne non nulle : $\mu_X \neq 0$
   b) La moyenne de la variable aléatoire X est nulle : $\mu_X = 0$
2) Considérons maintenant le cas où Θ est une variable aléatoire uniforme sur $\big[-\pi, \pi\big]$,
   a) Calculer la moyenne statistique du signal $Y(t)$?
   b) Déterminer la fonction d'autocorrélation statistique $R_{YY}(\tau)$ du signal $Y(t)$?
   c) En déduire que le signal $Y(t)$ est stationnaire au sens large?
   d) Vérifier l'ergodicité du signal $Y(t)$ lorsque la variable aléatoire X est fixée à une valeur x_0?

Exercice 4 : Stationnarité d'un signal aléatoire

Soit $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux aléatoires stationnaires au sens large, de moyennes statistques μ_X et μ_Y. Leurs fonctions d'autocorrélation sont notées $R_{XX}(\tau)$ et $R_{YY}(\tau)$ respectivement. Nous désignons par $R_{XY}(t_1, t_2)$ la fonction d'intercorrélation des deux signaux $X(t)$ et $Y(t)$. Considérons le signal aléatoire $Z(t)$ défini par,

$$Z(t) = \alpha X(t) + \beta X(t - T_0) + Y(t)$$

où α et β sont deux constantes réelles non nulles, et T_0 est un décalage temporel fixe.

1) Trouver la moyenne statistique $\mu_Z(t)$ du signal $Z(t)$ en fonction de μ_X et μ_Y? Conclure?
2) Déterminer l'expression de le fonction d'autocorrélation $R_{ZZ}(t_1, t_2)$ en fonction de $R_{XX}(\tau)$, $R_{YY}(\tau)$, $R_{XY}(t_1, t_2)$, α, β, et T_0?
3) Quelles conditions doivent vérifier les signaux $X(t)$ et $Y(t)$ pour que le signal $Z(t)$ soit stationnaire au sens large?
   Par la suite nous supposons que $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL et orthogonaux
4) Trouver la nouvelle expression de la fonction d'autocorrélation $R_{ZZ}(t_1, t_2)$? En déduire l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{ZZ}(f)$?
5) En utilisant le résultat précédent, déterminer l'expression de la puissance moyenne du signal $Z(t)$?