Pr. Mohamed ET-TOLBA **Janvier 2020**
Institut National des Postes et Télécommunications

Cycle d'ingénieur INE1

Filière: Cyber-sécurité et confiance numérique

Traitement du signal

Examen écrit (durée : 1h30)

- ✓ **L'examen est composé de trois exercices répartis sur deux pages**
- ✓ **Le seul document autorisé est celui des formules utiles**
- ✓ **Toute rédaction en crayon ou stylo rouge sera rejetée**

Exercice 1 : Questions de cours**(4 points)

1) Rappeler l'interprétation de la formule de Parseval pour la transformée de Fourier et pour la décomposition en séries de Fourier? **(1 pt.)**
2) Montrer que la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ d'un signal $x(t)$, d'énergie finie, est maximale à l'origine? **(1 pt.)**
3) Citer les rôles de l'échantillonnage et la quantification dans un convertisseur analogique numérique? **(1 pt.)**
4) Monter que la réponse $y(t)$ d'un système linéaire temporellement invariant (LTI), de réponse impulsionnelle $h(t)$, à un exponentiel complexe $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ est un exponentiel complexe? **(1 pt.)**

Exercice 2 : Spectre de raies, formule de Parseval, et échantillonnage**************(10 points)

Considérons un signal analogique $x(t)$ qui s'exprime de la manière suivante :

$$x(t) = 2 + 3cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Où f_0 et θ_0 sont deux constantes désignant une fréquence et une phase respectivement.

1) Monter que le signal $x(t)$ est périodique et trouver sa période T_0? **(1 pt)**
2) Déterminer les coefficients de Fourier $X_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ de $x(t)$? En déduire sa transformée de Fourier $X(f)$? **(2 pts.)**
3) Trouver la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ de $x(t)$? En déduire la puissance P_x de $x(t)$? **(1.5 pt.)**
4) Vérifier la formule de Parseval pour $x(t)$ en utilisant le résultat de la question 3)? **(1.5 pt.)**
5) Nous nous intéressons maintenant à l'échantillonnage idéal du signal $x(t)$ avec une période d'échantillonnage T_e en fixant f_0 à **5 Hz**.
    a) Calculer la fréquence de Nyquist F_N pour le signal $x(t)$ et vérifier la possibilité de l'échantillonner, sans perte d'information, avec $T_e = 40\ ms$? **(1 pt.)**
    b) Déterminer l'expression du signal échantillonné $x_e(t)$ et celui de son spectre $X_e(f)$? Conclure ? **(1.5 pt.)**
    c) Tracer le spectre $X_e(f)$ pour la période d'échantillonnage $T_e = 40\ ms$? **(1.5 pt.)**

<u>Exercice 3</u> : <u>Transmission d'un signal déterministe à travers un système LTI*****(6 points)</u>**

Considérons la transmission d'un signal $x(t)$, de puissance finie et de densité spectrale de puissance $S_{XX}(f)$, à travers un système de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-t}u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon unitaire. Le signal $y(t)$, en sortie du système, est le produit de convolution entre $h(t)$ et le signal d'entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)\, x(t-\lambda) d\lambda$$

Nous notons par $S_{YY}(f)$ la densité spectrale de puissance du signal $y(t)$.

1) Montrer que le système est linéaire et temporellement invariant? **<u>(1 pt.)</u>**
2) Le système est-il causal? Justifier votre réponse? **<u>(1 pt.)</u>**
3) Déterminer la réponse en fréquence $H(f)$ du système? **<u>(1 pt.)</u>**
4) Trouver l'expression de la densité spectrale de puissance $S_{YY}(f)$ en fonction de $H(f)$ et $S_{XX}(f)$? **<u>(1.5 pt.)</u>**
5) Déterminer l'expression de $S_{YY}(f)$ dans le cas où le signal d'entrée $x(t)$ possède la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau) = A.cos(4\pi f_0 \tau)$ où A et f_0 sont des constantes? **<u>(1.5 pt.)</u>**