

**Cycle d'ingénieur INE1**

**Filière: Cyber-sécurité et confiance numérique**

**Traitement du signal**

**Examen écrit (durée : 1h40)**

- ✓ L'examen est composé de trois exercices répartis sur deux pages
- ✓ Le seul document autorisé est celui des formules utiles
- ✓ Toute rédaction en crayon ou stylo rouge sera rejetée

**Exercice 1 : Questions de cours** **(6 points)**

- 1) Rappeler les deux méthodes principales pour représenter un signal analogique dans le domaine fréquentiel ? **(1 pt.)**
- 2) Quelle est la différence entre le spectre obtenu avec le développement en séries de Fourier et celui obtenu par la transformée de Fourier ? **(1 pt.)**
- 3) Montrer que la fonction d'autocorrélation  $R_{xx}(\tau)$  d'un signal périodique  $x(t)$ , de période  $T_0$ , est périodique de même période ? **(2 pts.)**
- 4) Énoncer le théorème de Nyquist-Shannon pour l'échantillonnage ? **(1 pt.)**
- 5) Donner la définition de la fréquence de Nyquist ? **(1 pt.)**

**Exercice 2 : Transformée de Fourier et spectre d'énergie** **(8 points)**

Considérons le signal analogique  $x(t)$  défini par :

$$x(t) = Ke^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0), \quad \alpha > 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

où  $K$  est une constante réelle,  $t_0$  un décalage temporel positif, et  $u(t)$  désigne le signal échelon unitaire.

- 1) Tracer le signal échelon unitaire  $u(t)$  en fonction du temps ? En déduire l'effet de sa multiplication avec un signal analogique ? **(1 pt)**
- 2) Déterminer l'expression de l'énergie  $E_x$  du signal  $x(t)$  en fonction de  $K$  et  $\alpha$  ? En déduire la classification énergétique de  $x(t)$  ? **(1.5 pt.)**
- 3) Trouver l'expression de la transformée de Fourier  $X(f)$  de  $x(t)$  en fonction de  $K$ ,  $\alpha$ , et  $t_0$  ? **(1.5 pt.)**
- 4) Déterminer la fonction d'autocorrélation  $R_{xx}(\tau)$  en fonction de  $K$  et  $\alpha$  ? Retrouver l'énergie  $E_x$  de  $x(t)$  ? **(1.5 pt.)**
- 5) En utilisant le résultat trouvé dans 4), déterminer l'expression de la densité spectrale d'énergie  $S_{xx}(f)$  ? **(1 pt.)**
- 6) Vérifier la formule de Parseval pour le signal  $x(t)$  ? Conclure ? **(1.5 pt.)**

**Exercice 3 : Echantillonnage**

**(6 points)**

Soit le signal analogique  $y(t)$  défini par :

$$y(t) = 1 - \sin^2(2\pi f_0 t) + \cos^2(4\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où  $f_0 = 5 \text{ Hz}$ . On s'intéresse à l'échantillonnage idéal de  $y(t)$  à une fréquence d'échantillonnage  $F_e = \frac{1}{T_e}$ , où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

- 1) Calculer et tracer le spectre  $Y(f)$  du signal  $y(t)$  ? En déduire que  $y(t)$  est à bande limitée ? **(1 pt.)**
- 2) Trouver les fréquences contenues dans le signal  $y(t)$ , et calculer sa fréquence de Nyquist  $F_N$  ? **(0.5 pt.)**
- 3) Vérifier la possibilité d'échantillonner le signal  $y(t)$ , sans perte d'information, avec les deux périodes d'échantillonnage  $T_{e1} = 20 \text{ ms}$  et  $T_{e2} = 50 \text{ ms}$  ? **(1 pt.)**
- 4) Déterminer l'expression du signal échantillonné  $y_e(t)$  ? **(1 pt.)**
- 5) Trouver l'expression du spectre  $Y_e(f)$ , du signal échantillonné, en fonction de  $Y(f)$  ? Interpréter le résultat ? **(1.5 pt.)**
- 6) En utilisant le résultat de la question 3), tracer le spectre  $Y_e(f)$  avec la fréquence d'échantillonnage permettant d'éviter la perte d'information ? **(1 pt.)**