**Pr. Mohamed ET-TOLBA**
**Institut National des Postes et Télécommunications** **Novembre 2019**

# Cycle d'ingénieur INE2

## Filière : Smart-ICT

## Théorie de décision et d'estimation

## Examen écrit (Durée : 1h45)

- ✓ **L'examen est composé de trois exercices répartis sur deux pages**
- ✓ **Aucun document n'est autorisé**
- ✓ **Toute rédaction en crayon ou stylo rouge sera rejetée**

**Exercice 1 : Questions de cours** ****************************************************************( **4 points)**

1) Citer les critères de détection pour l'approche de Bayes et celle de Neyman-Pearson? **(0.5 pt.)**
2) Quelles sont les deux critères qui permettent d'établir la règle de décision pour un détecteur au maximum à postériori (MAP)? **(1 pt.)**
3) Montrer que la minimisation de l'erreur quadratique moyenne d'un estimateur $\widehat{\Theta}$, sans biais, revient à minimiser sa variance $Var[\widehat{\Theta}]$? **(1.5 pt.)**
4) Quelle est la différence entre l'estimation classique (ou déterministe) et l'estimation Bayésienne ? Citer un estimateur de chaque catégorie? **(1 pt.)**

**Exercice 2 : Détection des signaux dans un bruit blanc gaussien** *************************( **9 points)**

Considérons une source qui émet un signal constant $s(t)$ pouvant prendre une des deux valeurs possibles $A_0$ et $A_1$ avec $A_1 > A_0$. Nous associons l'hypothèse $H_0$ à l'événement « la sortie de la source est $A_0$ », et l'hypothèse $H_1$ à l'événement « la sortie de la source est $A_1$ ». Les deux hypothèses $H_0$ et $H_1$ sont émises avec les probabilités à priori $P_0$ et $P_1$ respectivement. Le signal $s(t)$ est transmis à travers un canal qui lui ajoute un bruit blanc gaussien $n(t)$, indépendant de $s(t)$, de moyenne nulle est de variance $\sigma^2$.

Nous supposons que le récepteur observe un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $K$ échantillons indépendants pour détecter le signal $s(t)$. Sous les hypothèses $H_0$ et $H_1$, les observations sont formulées de la manière suivante :

$$H_0 \;:\quad x_k = A_0 + n_k \quad k = 0,1,\dots,K-1$$
$$H_1 \;:\quad x_k = A_1 + n_k \quad k = 0,1,\dots,K-1$$

où les $n_k$ sont les échantillons du bruit $n(t)$. Ils sont supposés être indépendants les uns des autres.

Nous précisons que $x_k$ est une réalisation d'une variable aléatoire $X_k$, et $\boldsymbol{x}$ est une réalisation d'une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$. De plus, nous désignons par $c_{ij}$ le coût de choisir $H_i$ lorsque $H_j$ est vraie.

1) Trouver les expressions des densités de probabilité $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|H_0)$ et $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|H_1)$? **(1.5 pt.)**
2) Déterminer l'expression du rapport de vraisemblance $\Lambda(\boldsymbol{x})$ et donner le test de Bayes avec un seuil de décision $\eta$ ? **(1 pt.)**
3) Montrer que le test de Bayes peut se réduire à la forme suivante :

$$\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} x_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

Le nouveau seuil de décision $\lambda$ s'exprimera en fonction de $A_0$, $A_1$, $K$, $\sigma^2$ et $\eta$. **(1.5 pt.)**

4) Trouver l'expression de la probabilité de fausse alarme $P_{FA}$ en fonction de $A_0$, $K$, et $\lambda$ ? **(1 pt.)**
5) Déterminer l'expression de la probabilité de détection $P_D$ en fonction de $A_1$, $K$, et $\lambda$ ? **(1 pt.)**
6) Supposons que $c_{00} = c_{11} = 0$ et $c_{10} = c_{01} = 1$.
   a) Trouver la nouvelle expression du seuil de décision $\eta$ et donner la règle de décision correspondante ? Qu'appelle-t-on ce détecteur? **(1 pt.)**
   b) D'une manière similaire à la question 3), trouver la forme équivalente du détecteur précédent en spécifiant la nouvelle expression du seuil de décision $\lambda$ ? **(1 pt.)**
   c) Refaire la question 6) b) dans le cas où $H_0$ et $H_1$sont équiprobables? **(1 pt.)**

**Exercice 3 : Estimation au maximum de vraisemblance** *************************************( 7 points)**

Considérons la transmission d'un signal constant $s(t) = A$ inconnu à travers un canal qui lui ajoute un bruit blanc gaussien $n(t)$ de moyenne nulle et de variance $A/_2$. Le paramètre inconnu $\theta$, supposé positif $(\theta > 0)$, se manifeste comme étant la valeur du signal et le double de la variance du bruit.

Nous nous intéressons à l'estimation du paramètre inconnu $\theta = A$, avec l'approche au maximum de vraisemblance, en observant un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $K$ échantillons indépendants qui s'expriment :

$$x_k = A + n_k \qquad k = 1, 2, \dots, K$$

Où les $n_k$ sont les échantillons du bruit, supposés indépendants les uns des autres.

1) Déterminer l'expression de la densité de probabilité $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta)$ en fonction de $\theta$ ? **(1.5 pt.)**
2) Trouver l'expression de la fonction logarithmique de vraisemblance en fonction de $\theta$ ? **(1 pt.)**
3) Montrer que la détermination de l'estimateur au maximum de vraisemblance $\widehat{\Theta}_{MV}$ revient à résoudre une équation de second degré dont nous retiendrons la solution adéquate? **(1.5 pt.)**
4) Supposons que le bruit est de variance $\sigma^2$ connue,
   a) Déterminer la nouvelle forme de l'estimateur au maximum de vraisemblance $\widehat{\Theta}_{MV}$ ? Conclure? **(1 pt.)**
   b) Trouver le biais $B[\widehat{\Theta}_{MV}]$ et la variance $Var[\widehat{\Theta}_{MV}]$ ? **(1 pt.)**
   c) Peut-on conclure que $\widehat{\Theta}_{MV}$ est un estimateur sans biais à variance minimale? Justifier votre réponse? **(1 pt.)**

---

**Rappel :**

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$